

TÓPICOS de MATÉRIA CONDENSADA

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Série 1

1. Para um espaço vectorial de dimensão n , definem-se os símbolos completamente anti-simétricos $\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \epsilon^{i_1 \dots i_n}$, iguais a 1, se $i_1 \dots i_n$ for uma permutação par de $1, 2, \dots, n$, iguais a -1 , se for uma permutação ímpar, e iguais a 0, se houver índices repetidos.

Analogamente, definem-se os delta generalizados de Kronecker, $\delta_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m}$, com $m \leq n$, completamente anti-simétricos nos seus índices, iguais a 1, se $i_1 \dots i_m$ for uma permutação par de $j_1 \dots j_m$, iguais a -1 , se for uma permutação ímpar, e iguais a 0, nos outros casos.

a) Mostre que

$$\epsilon^{i_1 \dots i_n} \epsilon_{j_1 \dots j_n} = \delta_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n}$$
$$\delta_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m} = \begin{pmatrix} \delta_{j_1}^{i_1} & \dots & \delta_{j_m}^{i_1} \\ \dots & \cdot & \cdot \\ \delta_{j_1}^{i_m} & \dots & \delta_{j_m}^{i_m} \end{pmatrix}$$

com $m \leq n$.

b) Mostre que, partindo de $\delta_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n}$ e contraindo sucessivamente um índice, iremos obtendo $1, 2, \dots, n$ vezes o delta generalizado seguinte, obtendo-se no final $\delta_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} = n!$

c) Particularize para $n = 3$ e obtenha

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{abc} = \delta_{abc}^{ijk} = \begin{pmatrix} \delta_a^i & \delta_b^i & \delta_c^i \\ \delta_a^j & \delta_b^j & \delta_c^j \\ \delta_a^k & \delta_b^k & \delta_c^k \end{pmatrix}$$

$$\delta_{ab}^{ij} = \begin{pmatrix} \delta_a^i & \delta_b^i \\ \delta_a^j & \delta_b^j \end{pmatrix}$$

$$\delta_{abp}^{ijp} = \delta_{ab}^{ij}$$

$$\delta_{ap}^{ip} = 2\delta_a^i$$

$$\delta_p^p = 3$$

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{ijk} = \delta_{ijk}^{ijk} = 3!$$

Referência: I. S. Sokolnikoff, Tensor Analysis, John Wiley & Sons, Inc.

2. Considere dois spins $\frac{1}{2}$.

a) Mostre que os estados de spin total $S = 1$, com $m = -1, 0, 1$ são simétricos para a permutação dos dois spins e que o estado de spin total $S = 0$, com $m = 0$, é anti-simétrico.

b) Expresse o operador de troca em termos do operador $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$.

3. Considere um sistema de N partículas, que poderão ser spins J ou fermiões com ou sem spin, com condições periódicas fronteira.

a) Quais são os valores possíveis do momento? Indique quais são as funções próprias do operador das translações e discuta a divisão do espaço de Hilbert em conjuntos irredutíveis.

b) Admitindo que o Hamiltoniano é invariante para translações e que N ou S_z também são conservados, indique uma base conveniente de funções de onda.

4. Considere um sistema de N partículas, descritas pelo grau de liberdade ϕ_j , $j = 0, 1, \dots, N-1$, com condições fronteira periódicas, i.e. $\phi_{j+N} = \phi_j$. As partículas estão afastadas entre si de uma distância a , pelo que a coordenada da partícula j é $x_j = ja$. Defina $L = Na$.

a) Defina a transformada de Fourier

$$\phi_j = \frac{1}{N} \sum_k e^{ikj} \tilde{\phi}_k$$

indicando os possíveis valores do momento k . Obtenha a fórmula de inversão desta transformada e indique a(s) relação(s) de ortogonalidade (ou de conjunto completo) envolvida(s).

b) Considere os limites i) $N \rightarrow \infty$, a fixo, ii) $a \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, com L fixo, iii) $a \rightarrow 0$, $L \rightarrow \infty$, e obtenha as expressões da transformação de Fourier directa e inversa. Dê exemplos de aplicação de cada um dos casos obtidos.

Indique também a forma que as relações de ortogonalidade ou de conjunto completo tomam, nos diferentes casos, obtendo expressões para as séries ou integrais de Fourier do símbolo de Kronecker ou da função delta de Dirac (ou do pente de Dirac).

c) Ao escrever um programa em FORTRAN como implementa a enumeração de $0, 1, \dots, N-1$ ou, mais geralmente, uma enumeração que não seja de 1 a N ?

5. Mostre que se, na transformada discreta de Fourier,

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}kl} f_l$$

em que $l, k = 0, 1, \dots, N-1$, o número de pontos, N , for par, se pode escrever

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}kl} f_{2l} + e^{-i\frac{2\pi}{N}k} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}kl} f_{2l+1},$$

separando as somas nos pontos pares e ímpares.

A transformada de Fourier fica assim decomposta na soma de duas transformadas de Fourier para um sistema com metade do tamanho (e multiplicação por uma fase), reduzindo a complexidade do seu cálculo. A Fast Fourier Transform baseia-se nesta ideia.

Referência: W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W. T. Vetterling, Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, 1988.

6. a) Numa rotação infinitesimal um vector \vec{A} transforma-se de acordo com $\delta\vec{A} = \delta\phi\vec{n} \times \vec{A}$ em que $\delta\phi$ é o ângulo infinitesimal de rotação e \vec{n} o eixo da rotação. Mostre que os geradores L^i das rotações, em coordenadas cartesianas, são portanto representados pelas matrizes $L_{jk}^i = -i\epsilon^{ijk}$. Verifique que estas matrizes constituem uma representação de momento angular com $l = 1$, verificando que as relações de comutação $[L^i, L^j] = i\epsilon^{ijk}L^k$ e a relação $\vec{L}^2 = 2$, são satisfeitas, e verificando que esta é a forma que os operadores $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ tomam na base $\psi_i(\vec{r}) = x^i$.

7. a) Mostre que as representações de spin $\frac{1}{2}$ das rotações podem ser escritas da forma

$$e^{-i\frac{\phi}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cos\frac{\phi}{2} - i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\frac{\phi}{2}$$

em que $\vec{\sigma}$ são as matrizes de Pauli e o vector \vec{n} é unitário, $|\vec{n}|^2 = 1$, usando $(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})^2 = |\vec{a}|^2$.

b) Mostre que as representações de spin 1 das rotações podem ser escritas da forma

$$e^{-i\phi\vec{n}\cdot\vec{L}} = \delta_{||} + \cos\phi\delta^\perp - i\sin\phi\vec{n}\cdot\vec{L}$$

em que as componentes de \vec{L} são dadas por $L_{lm}^i = -i\epsilon_{ilm}$ e o vector \vec{n} é unitário, $|\vec{n}|^2 = 1$. As matrizes $\delta^{\parallel}, \delta^{\perp}$ são definidas por $\delta_{lm}^{\parallel} = n_l n_m$ e $\delta_{lm}^{\perp} = \delta_{lm} - \delta_{lm}^{\parallel}$. Verifique que $(\vec{n} \cdot \vec{L})^2 = \delta^{\perp}$ e que $(\vec{n} \cdot \vec{L})\delta^{\perp} = \vec{n} \cdot \vec{L}$.

Particularize para uma rotação em torno do eixo dos z .

c) Mostre, usando o resultado da alínea b), que o operador momento angular \vec{J} na representação J tem, em virtude de ser um operador vectorial, de satisfazer a

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{n} \cdot \vec{J}\phi\right) \vec{J} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{n} \cdot \vec{J}\phi\right) = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{J}) - \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{J}) \cos \phi + \vec{n} \times \vec{J} \sin \phi$$

verificando que o lado direito da equação é o vector obtido rodando \vec{J} em torno de \vec{n} por um ângulo ϕ .

Verifique explicitamente esta relação para spin $\frac{1}{2}$ usando os resultados da alínea a).

8. No estudo do momento angular é conveniente definir as componentes esféricas $S^{\pm} = S^x \pm iS^y$ e $S^0 = S^z$ de um vector \vec{S} .

a) Verifique que se tem $S^x = \frac{1}{2}(S^- + S^+)$, $S^y = \frac{i}{2}(S^- - S^+)$, de onde resulta que $\vec{S} = \sum_{\alpha} S^{\alpha} \vec{e}_{\alpha} = S^+ \vec{e}_- + S^- \vec{e}_+ + S^0 \vec{e}_0$, em que se definiu $\vec{e}_{\pm} = \frac{1}{2}(\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y)$, $\vec{e}_0 = \vec{e}_z$ e usou a notação $\bar{\alpha} = -\alpha$, com $\alpha = 0, \pm 1$.

b) Verifique que estes vectores satisfazem $\vec{e}_0^2 = 1$, $\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_{\pm} = 0$, $\vec{e}_{\pm}^2 = 0$ e $\vec{e}_+ \cdot \vec{e}_- = \frac{1}{2}$, tendo-se portanto $S^{\pm} = 2\vec{e}_{\pm} \cdot \vec{S}$ e $S^0 = \vec{e}_0 \cdot \vec{S}$.

Verifique também que $\vec{e}_- \times \vec{e}_+ = \frac{i}{2}\vec{e}_0$ e $\vec{e}_{\pm} \times \vec{e}_0 = \pm i\vec{e}_{\pm}$. Esta última relação mostra que os vectores \vec{e}_{\pm} são vectores próprios do operador $i\vec{e}_0 \times$, com valores próprios ± 1 , o que está de acordo com o exercício sobre as rotações a três dimensões. O outro vector próprio é o próprio vector \vec{e}_0 , com valor próprio 0.

c) Verifique que os produtos interno e externo de dois vectores \vec{a} e \vec{b} são dados respectivamente por

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(a^+ b^- + a^- b^+) + a^0 b^0$$

e

$$\vec{a} \times \vec{b} = i \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\vec{e}_0 & \vec{e}_+ & \vec{e}_- \\ a^0 & a^+ & a^- \\ b^0 & b^+ & b^- \end{vmatrix}$$

d) Verifique que os factores 2 das fórmulas anteriores seriam evitados usando vectores e componentes normalizados $\frac{S^\pm}{\sqrt{2}}$ e $\sqrt{2}\vec{e}_\pm$. Em particular, as fórmulas para os produtos interno e externo podem reescrever-se como

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{a^+ b^-}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{a^- b^+}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + a^0 b^0$$

e

$$\vec{a} \times \vec{b} = i \begin{vmatrix} \vec{e}_0 & \sqrt{2}\vec{e}_+ & \sqrt{2}\vec{e}_- \\ a^0 & \frac{a^+}{\sqrt{2}} & \frac{a^-}{\sqrt{2}} \\ b^0 & \frac{b^+}{\sqrt{2}} & \frac{b^-}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

e) Escreva a equação de precessão de um spin \vec{S} num campo magnético \vec{H}

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{S} \times \vec{H}$$

na base esférica.

9. Considere os operadores $J_+ = J_x + iJ_y$ e $J_- = J_x - iJ_y$, onde J_x, J_y, J_z são as componentes do operador momento angular e $|jm_j\rangle$ os vectores próprios de J^2, J_z .

a) Prove que satisfazem às relações de comutação $[J^2, J_+] = 0$, $[J^2, J_-] = 0$, $[J_z, J_+] = \hbar J_+$, $[J_z, J_-] = -\hbar J_-$, $[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$.

b) Obtenha as equações que exprimem a acção de J_+ e J_- em $|jm_j\rangle$.

10. a) Mostre que qualquer matriz do grupo SU(2), de dimensão 2×2 , é da forma

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix}$$

em que α, β são números complexos que satisfazem $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

b) Mostre que para a rotação $U(\phi, \vec{n}) = e^{-i\phi\vec{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}$, de um ângulo ϕ em torno do vector \vec{n} , se tem $\alpha = \cos\frac{\phi}{2} - i\cos\theta\sin\frac{\phi}{2}$ e $\beta = -i\sin\theta e^{i\varphi}\sin\frac{\phi}{2}$.

c) Mostre que se dois spinores $\Lambda = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ e $\Lambda' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$ verificarem $\Lambda' = U\Lambda$, então os spinores $\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} v^* \\ -u^* \end{pmatrix}$ e $\tilde{\Lambda}' = \begin{pmatrix} v'^* \\ -u'^* \end{pmatrix}$ verificam também a mesma relação.

11. Mostre que o operador $S_n = \vec{n} \cdot \vec{S} = \vec{n} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}$, componente do operador $\vec{S} = \frac{\vec{\sigma}}{2}$, de spin $\frac{1}{2}$, segundo o vector $\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, é dado por

$$S_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Determine os valores e vectores próprios deste operador.

12. Mostre as seguintes relações:

a)

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$

se se verificar

$$[[A, B], A] = [[A, B], B] = 0$$

b)

$$a^\dagger f(N) = f(N-1) a^\dagger$$

$$a f(N-1) = f(N) a$$

em que a, a^\dagger são operadores de destruição e de criação bosónicos ou fermiónicos e $N = a^\dagger a$.

c)

$$J_+ f(J_z) = f(J_z - 1) J_+$$

$$J_- f(J_z - 1) = f(J_z) J_-$$

em que J_\pm, J_z são operadores de momentum angular.

13. Construa os invariantes até à quarta ordem no parâmetro de ordem, e segunda ordem nas derivadas espaciais, para os seguintes sistemas:

a) Um sistema com um parâmetro de ordem com seis componentes reais, com simetria de troca e de reflexão nas componentes.

b) Um sistema com um parâmetro de ordem com seis componentes reais, com simetria de reflexão e de rotação no espaço de spin a seis dimensões. As rotações de spin são independentes das rotações espaciais.

c) Um sistema com dois parâmetros de ordem, cada um com três componentes reais. A simetria consiste nas rotações tridimensionais de cada

parâmetro de ordem separadamente. As rotações espaciais são independentes.

d) Um sistema como em c) mas em que os dois parâmetros de ordem rodam em conjunto.

e) Um sistema como em c) mas em que as rotações dos parâmetros de ordem são induzidas pela rotações das coordenadas espaciais.

14. Uma cadeia de N partículas de massa m , com condições fronteira periódicas, está em repouso quando as partículas estão separadas de uma distância a . Expandindo a energia potencial do sistema em potências dos desvios, η_i , das coordenadas, para fora da posição de equilíbrio, obtemos:

$$V = -\frac{m}{2} \sum_{ij} C_{ij} \eta_i \eta_j,$$

com $C_{ji} = C_{ij}$, e tendo escolhido como zero da energia o valor da energia no ponto de equilíbrio. Como o sistema é invariante para translações, verifica-se que $C_{ij} = C(i-j) = C_{j-i}$.

a) Obtenha as equações de movimento. Por transformação de Fourier, introduza os modos normais de vibração. Obtenha a relação de dispersão $\omega_q^2 = -\tilde{C}_q$ em que $\tilde{C}_q = \sum_{x_i-x_j} e^{-iq(x_i-x_j)} C_{ij}$.

Verifique que o Hamiltoniano e o Lagrangeano ficam completamente desacoplados nas novas variáveis (modos normais de vibração).

b) Dada a invariância para translações do espaço, um deslocamento arbitrário de uma dada solução das equações de movimento deverá ser também solução. Verifique que terá de ser $\tilde{C}_0 = 0$, implicando o anulamento de ω_q quando $q \rightarrow 0$, ou seja, a existência de um bóson de Nambu-Goldstone.

c) Use a identidade $2\eta_i \eta_j = \eta_i^2 + \eta_j^2 - (\eta_i - \eta_j)^2$ para reescrever o potencial na forma

$$V = \frac{m}{4} \sum_{ij} C_{ij} (\eta_i - \eta_j)^2.$$

Interprete fisicamente. Obtenha de novo as equações de movimento e a relação de dispersão, na forma $\omega_q^2 = \tilde{C}_0 - \tilde{C}_q$.

d) Generalize para um sistema de dimensão d .

e) Considere o limite contínuo $a \rightarrow 0$.