

### 3 FORMALISMO DE INTEGRAL DE CAMINHO DA TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

A maneira mais intuitiva de passar da mecânica quântica para a teoria quântica dos campos é seguir a via que normalmente é seguida para passar da mecânica clássica para a teoria clássica de campos e que consiste em considerar que temos um conjunto de partículas pontuais, constituindo uma rede espacial com uma constante de rede  $a$ , em interação umas com as outras, escrever o hamiltoniano, o lagrangeano, as equações de movimento, a decomposição em modos normais, etc, e obter então o limite contínuo, fazendo o limite  $a \rightarrow 0$ .

Costuma-se então referenciar as partículas pela sua posição  $\vec{x}$  de equilíbrio ou na origem dos tempos, sendo então o desvio  $\vec{\eta}$  dessa posição, no instante  $t$ , indicada por  $\vec{\eta}(\vec{x}, t)$ . Desta forma o espaço  $\vec{x}$ , e o tempo  $t$ , aparecem imediatamente em pé de igualdade, perdendo a coordenada  $\vec{x}$  (em favor de  $\vec{\eta}$ ) o carácter especial que a mecânica quântica lhe conferia. A relação de comutação  $[\eta_l(t), \pi_m(t)] = i\hbar\delta_{lm}$ , com  $l, m = x, y, z$ , diz assim respeito a  $\vec{\eta}$  (e ao seu momento conjugado). Tal como é característico do formalismo hamiltoniano, esta relação de comutação é, porém, definida para tempos iguais. A passagem ao formalismo lagrangeano fará, finalmente, o espaço e o tempo aparecerem de uma forma simétrica.

Usando esta via para a construção da teoria quântica de campos a construção do integral de caminho para o operador de evolução entre os instantes de tempo  $t_i$  e  $t_f$ , faz-se simplesmente construindo simultaneamente o integral de caminho para cada uma das partículas. Se utilizarmos a aproximação discreta para o integral de caminho, obtemos uma rede no espaço e no tempo, sendo a constante da rede na direcção temporal  $\Delta t = \frac{t_f - t_i}{N}$ . Em princípio, o limite  $N \rightarrow \infty$  deve ser tomado antes de um eventual limite  $t_f - t_i \rightarrow \infty$ .

As chamadas teorias na rede utilizam as vantagens de uma constante de rede finita. Tal como é bem conhecido em física do estado sólido, uma constante de rede finita dá-nos naturalmente um cut-off  $\Lambda = \frac{\pi}{a}$  no espaço dos momenta, os quais ficam restringidos à 1ª zona de Brillouin, ao contrário do que é normalmente feito de uma forma arbitrária para se controlar as divergências ultravioletas, ou seja, devido a grandes momentos, da teoria de perturbações. Se, além disso, impusermos condições periódicas fronteira, o sistema passa a ser, de facto, um sistema finito, tornando possível a utilização

de técnicas sofisticadas de computação, do tipo Monte Carlo, por exemplo. Nestas teorias, começamos por definir os campos de matéria nos nodos da rede, tal como foi referido. Ao tentarmos generalizar uma simetria global do sistema para uma simetria local em que a transformação varia de ponto para ponto, verifica-se ser necessário, tal como nas teorias de gauge no continuum, introduzir novos campos (de gauge), transformando-se de modo a compensar a diferença de transformações em pontos diferentes da rede. Os campos de gauge aparecem assim associados aos elos da rede. Quando a constante da rede tende para zero devemos obter formalmente a teoria correspondente do continuum.

Uma vez obtido o integral de caminho, o problema que se põe é o do seu cálculo e das funções de correlação a ele associadas. Infelizmente, porém, são poucos os casos em que é possível fazer tal cálculo de uma forma exacta sem que a acção seja quadrática e o integral gaussiano. É portanto geralmente necessário recorrer a métodos aproximados e ao desenvolvimento de teorias de perturbações. Para isso, começa-se por escolher uma parte quadrática da acção como termo não perturbado, correspondente à aproximação de ordem zero, tratando-se então a parte restante da acção como uma perturbação. A escolha da parte não perturbada deverá ser feita de uma forma criteriosa de modo que descreva, mesmo em ordem zero, o melhor possível o sistema físico em questão (uma transição de fase, por exemplo), e que a perturbação seja o mais pequena possível. A teoria de perturbações é feita usando as propriedades das médias gaussianas.

O termo não perturbado da acção pode ser decomposto numa soma de modos normais desacoplados uns dos outros, ou seja, num conjunto de osciladores harmónicos independentes. Torna-se assim necessário estudar com um certo detalhe o integral de caminho para o oscilador harmónico. Como a teoria de campos utiliza sistematicamente os operadores de criação e de destruição, utilizaremos nesse estudo os chamados estados coerentes, pois eles são vectores próprios destes operadores.

A teoria de campo para fermiões é feita desenvolvendo um programa análogo mas usando variáveis clássicas que anticomutam, ou seja, as chamadas variáveis de Grassmann.

### 3.1 Estados Coerentes

Nesta secção definiremos e estudaremos as propriedades dos chamados estados coerentes (ou quase clássicos) do oscilador harmónico, os quais são extremamente importantes em áreas tão diversas como a mecânica quântica e a teoria quântica dos campos, a óptica quântica, a mecânica estatística fora do equilíbrio, o estudo dos processos estocásticos, etc. Em mecânica quântica e em teoria quântica dos campos eles são úteis na construção do integral de caminho e na representação de operadores por funções definidas no espaço de fase, como a representação holomorfa, associada ao ordenamento normal, a função de Wigner, associada ao ordenamento simétrico ou de Weyl, o ordenamento antinormal, etc.

Os estados coerentes ou quase clássicos do oscilador harmónico são aqueles que mais se aproximam da descrição clássica do oscilador harmónico. Em mecânica clássica a especificação do estado de uma partícula é feita indicando a posição e a velocidade ou a coordenada e a impulsão num dado instante de tempo. Em mecânica quântica não é possível especificar simultaneamente a coordenada e a impulsão, e portanto apenas os seus valores expectáveis podem ser especificados. A primeira condição que os estados coerentes (normalizados)  $|xp\rangle$  devem satisfazer é portanto

$$\langle xp|\hat{x}|xp\rangle = x \quad (3.1.1)$$

$$\langle xp|\hat{p}|xp\rangle = p \quad (3.1.2)$$

Estes estados ficam completamente determinados impondo a condição adicional de o valor expectável da energia coincidir com a energia clássica, tomando em consideração a energia de ponto zero, i.e, exigindo que

$$\langle xp|\hat{\mathcal{H}}|xp\rangle = \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2\right) + \frac{\hbar\omega_0}{2} \quad (3.1.3)$$

Quando o hamiltoniano é (quanto muito) quadrático, como acontece no caso do oscilador harmónico, tanto os operadores  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  como os seus valores expectáveis seguem as equações clássicas de movimento. Como consequência, fixando os valores expectáveis de  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  num dado instante de tempo  $t = t_i$ , eles seguirão os valores clássicos correspondentes, para  $t > t_i$ .

Como acontece quase sempre com o oscilador harmónico, o estudo dos estados coerentes é feito mais facilmente usando os operadores de destruição

$a$  e de criação  $a^\dagger$ , definidos por

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}) \quad (3.1.4)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P}) \quad (3.1.5)$$

em que

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\hat{x} \quad (3.1.6)$$

e

$$\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega_0}}\hat{p} \quad (3.1.7)$$

são operadores adimensionais, e sendo o comutador

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (3.1.8)$$

O hamiltoniano

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\hat{x}^2 \quad (3.1.9)$$

toma as formas

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hbar\omega_0}{2}(\hat{P}^2 + \hat{X}^2) \quad (3.1.10)$$

$$= \hbar\omega_0\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \quad (3.1.11)$$

De uma forma análoga se definem as variáveis clássicas (números complexos)

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + iP) \quad (3.1.12)$$

$$\alpha^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - iP) \quad (3.1.13)$$

correspondentes aos valores expectáveis  $x$  e  $p$ , que interpretaremos como coordenadas (complexas) do espaço de fase. Tal como  $x$  e  $p$  eram variáveis independentes, também  $\alpha$  e  $\alpha^*$  serão consideradas variáveis independentes.

Passando a representar o estado coerente  $|xp\rangle$  por  $|\alpha\alpha^*\rangle$  ou mais simplesmente apenas por  $|\alpha\rangle$  (apesar de  $\alpha$  e  $\alpha^*$  serem consideradas independentes!), as condições (3.1.1), (3.1.2) e (3.1.3) passam a escrever-se

$$\langle \alpha|a|\alpha \rangle = \alpha \quad (3.1.14)$$

$$\langle \alpha | a^\dagger | \alpha \rangle = \alpha^* \quad (3.1.15)$$

e

$$\langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad (3.1.16)$$

Estas condições chegam para definir os estados coerentes. De facto, calculando a norma do vector  $(a - \alpha)|\alpha\rangle$ ,

$$|(a - \alpha)|\alpha\rangle|^2 = \langle \alpha | (a^\dagger - \alpha^*)(a - \alpha) | \alpha \rangle = \langle \alpha | (a^\dagger a - a^\dagger \alpha - \alpha^* a + |\alpha|^2) | \alpha \rangle = 0 \quad (3.1.17)$$

concluimos que ela é zero e que portanto  $(a - \alpha)|\alpha\rangle = 0$ , ou seja, que o estado coerente  $|\alpha\rangle$  é vector próprio, à direita, do operador de destruição  $a$ , com valor próprio  $\alpha$ , i.e.

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (3.1.18)$$

e que o estado  $\langle \alpha |$  é vector próprio, à esquerda, do operador de criação  $a^\dagger$ , com valor próprio  $\alpha^*$ , i.e.

$$\langle \alpha | a^\dagger = \langle \alpha | \alpha^*. \quad (3.1.19)$$

Estas equações conduzem imediatamente às equações (3.1.14), (3.1.15) e (3.1.16) e podem portanto ser usadas como equações de definição dos estados coerentes. Elas justificam a conveniência em usar estes estados ao trabalharmos com operadores de criação e de destruição.

Temos agora de resolver a eq. (3.1.18). Internando com o vector  $|n\rangle$ , vector próprio do operador número  $\hat{N} = a^\dagger a$ , e usando o complexo conjugado de

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (3.1.20)$$

obtemos

$$\sqrt{n+1} c_{n+1} = \alpha c_n \quad (3.1.21)$$

tendo definido

$$c_n = \langle n | \alpha \rangle \quad (3.1.22)$$

A solução desta equação é

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0 \quad (3.1.23)$$

Para que o estado coerente seja normado, terá de ser

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |c_0|^2 e^{|\alpha|^2} = 1 \quad (3.1.24)$$

Escolhendo  $c_0$  real e positivo, temos

$$c_0 = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \quad (3.1.25)$$

e portanto

$$|\alpha \rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n \rangle. \quad (3.1.26)$$

Usando a definição dos estados  $|n \rangle$

$$|n \rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0 \rangle \quad (3.1.27)$$

obtemos a seguinte expressão para os estados coerentes:

$$|\alpha \rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{a^\dagger \alpha} |0 \rangle \quad (3.1.28)$$

ou ainda

$$|\alpha \rangle = D(\alpha) |0 \rangle \quad (3.1.29)$$

sendo  $D(\alpha)$  o operador

$$D(\alpha) = \exp(a^\dagger \alpha - \alpha^* a) \quad (3.1.30)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{a^\dagger \alpha} e^{-\alpha^* a} \quad (3.1.31)$$

tal como se verifica usando a identidade

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \quad (3.1.32)$$

que é válida se  $[[A, B], A] = [[A, B], B] = 0$  e notando que  $e^{-\alpha^* a} |0 \rangle = |0 \rangle$ .

Usando as propriedades dos estados coerentes é fácil mostrar que as incertezas na coordenada e no momentum são respectivamente  $\Delta \hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}$  e  $\Delta \hat{P} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega_0}{2}}$ , e que, portanto, os estados coerentes minimizam a relação de incerteza de Heisenberg, i. e, que  $\Delta \hat{X} \Delta \hat{P} = \frac{\hbar}{2}$ . Este facto é por vezes usado para definir os estados coerentes. O número de ocupação  $\hat{N}$  não é bem definido, pois estes estados são obtidos por uma sobreposição (coerente) de estados com todos os números de ocupação, com uma probabilidade dada por

$$P_n(\alpha) = |c_n|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \quad (3.1.33)$$

a qual é uma distribuição de Poisson, que atinge o máximo para  $n$ =parte inteira de  $|\alpha|^2$ . A incerteza do operador número é  $\Delta\hat{N} = |\alpha|$  e a da energia é  $\Delta\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega_0|\alpha|$ . Quando  $|\alpha| > 1$  as incertezas relativas  $\frac{\Delta\hat{N}}{\langle\hat{N}\rangle} = \frac{1}{|\alpha|}$  e  $\frac{\Delta\hat{\mathcal{H}}}{\langle\hat{\mathcal{H}}\rangle} \simeq \frac{1}{|\alpha|}$  são pequenas, o que está de acordo com o facto de serem estados quase clássicos. Partindo de

$$e^{-i\hat{\mathcal{H}}t}a^\dagger e^{i\hat{\mathcal{H}}t} = a^\dagger(-t) = e^{-i\omega_0 t}a^\dagger \quad (3.1.34)$$

obtemos

$$\begin{aligned} e^{-i\hat{\mathcal{H}}t}|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-i\hat{\mathcal{H}}t} e^{a^\dagger\alpha} e^{i\hat{\mathcal{H}}t} e^{-i\hat{\mathcal{H}}t}|0\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} e^{a^\dagger e^{-i\omega_0 t}\alpha} e^{-i\omega_0 t/2}|0\rangle \\ &= e^{-i\omega_0 t/2}|e^{-i\omega_0 t}\alpha\rangle \end{aligned} \quad (3.1.35)$$

e concluímos, portanto, que os estados coerentes continuam coerentes seguindo a trajectória clássica, dada por  $\alpha(t) = e^{-i\omega_0 t}\alpha$ . O factor  $e^{-i\omega_0 t/2}$  resulta da energia de ponto zero.

Para obtermos a função de onda dos estados coerentes, começamos por escrever o operador  $D(\alpha)$  na forma

$$D(\alpha)|0\rangle = e^{i(P\hat{X} - X\hat{P})} \quad (3.1.36)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}XP} e^{iP\hat{X}} e^{-iX\hat{P}} \quad (3.1.37)$$

tendo usado de novo a identidade (3.1.32). A função de onda do estado coerente é dada por

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha_0}(X) &= \langle X|D(\alpha_0)|0\rangle \\ &= e^{-iX_0P_0/2} e^{iP_0X} e^{-X_0\frac{\partial}{\partial X}}\psi_0(X) \\ &= e^{-iX_0P_0/2} e^{iP_0X}\psi_0(X - X_0) \end{aligned} \quad (3.1.38)$$

sendo  $\psi_0(X)$  a função de onda do estado fundamental, dada por

$$\psi_0(X) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{1}{2}X^2} \quad (3.1.39)$$

tal como se conclui facilmente escrevendo a equação de definição do estado fundamental do oscilador harmónico

$$a|0\rangle = 0 \quad (3.1.40)$$

na representação  $X$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(X + \frac{\partial}{\partial X}\right)\psi_0(X) = 0 \quad (3.1.41)$$

A função de onda do estado coerente é portanto dada por

$$\psi_\alpha(X) = \frac{1}{\pi^{1/4}}e^{-\frac{1}{2}(X-X_0)^2+iP_0X-iX_0P_0/2} \quad (3.1.42)$$

$$= \frac{1}{\pi^{1/4}}e^{-\frac{1}{2}X^2+\sqrt{2}\alpha_0X-\frac{1}{2}(|\alpha_0|^2+\alpha_0^2)} \quad (3.1.43)$$

A eq. (3.1.42) mostra-nos que a função de onda  $\psi_{\alpha_0}(X)$  do estado coerente é obtida a partir do estado fundamental  $\psi_0(X)$  por uma translação  $X_0$ , de modo a ficar centrada em  $X_0$ , e multiplicando por  $e^{iP_0X}$ , o que no espaço de configuração corresponde à translação  $P_0$  no momentum. Tal como veremos, os operadores  $D(\alpha)$  caracterizam-se exactamente por este tipo de translações. O factor  $e^{-iX_0P_0/2}$  garante que o overlap com o estado fundamental  $\psi_0(X)$  seja real e positivo, sendo então dado por  $e^{-\frac{1}{2}|\alpha_0|^2}$ .

Por outro lado, vemos também que  $\psi_{\alpha_0}(X)$  é uma gaussiana, o que explica que a relação de incerteza de Heisenberg seja minimizada pois, como é sabido, para que a relação de incerteza de Heisenberg seja minimizada é necessário que a função de onda seja uma gaussiana, sem qualquer restrição no seu desvio padrão.

O produto interno de dois estados coerentes é dado por

$$\begin{aligned} \langle \beta | \alpha \rangle &= e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta^* \alpha)^n}{n!} \\ &= e^{-\frac{|\beta|^2}{2} - \frac{|\alpha|^2}{2} + \beta^* \alpha} \end{aligned} \quad (3.1.44)$$

$$= e^{\frac{1}{2}(\beta^* - \alpha^*)\alpha - \frac{1}{2}\beta^*(\beta - \alpha)} \quad (3.1.45)$$

o que mostra que dois estados coerentes nunca são ortogonais pois

$$|\langle \beta | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\beta - \alpha|^2} \quad (3.1.46)$$

Outra relação importante é a decomposição da identidade em termos de estados coerentes, dada por

$$\int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = \hat{1} \quad (3.1.47)$$

em que

$$d^2\alpha = \frac{d\alpha_R d\alpha_I}{\pi} \quad (3.1.48)$$

sendo  $\alpha_R$  e  $\alpha_I$  as partes real e imaginária de  $\alpha$ , ou equivalentemente

$$\int \frac{dx dp}{2\pi\hbar} |xp\rangle\langle xp| = \hat{1} \quad (3.1.49)$$

a qual se demonstra facilmente usando coordenadas polares, e escrevendo

$$\alpha = \rho e^{i\phi} \quad (3.1.50)$$

$$d\alpha_R d\alpha_I = \rho d\rho d\phi \quad (3.1.51)$$

Temos então

$$\begin{aligned} \int \frac{d\alpha_R d\alpha_I}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| &= \int \frac{d\alpha_R d\alpha_I}{\pi} \sum_{m,n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle\langle n| \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} 2\rho d\rho e^{-\rho^2} \frac{\rho^{m+n}}{\sqrt{m!n!}} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{i(m-n)\phi} |m\rangle\langle n| \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} du e^{-u} u^n |n\rangle\langle n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| \\ &= \hat{1} \end{aligned} \quad (3.1.52)$$

tendo usado a relação de ortogonalidade

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{i(m-n)\phi} = \delta_{m,n} \quad (3.1.53)$$

e o integral euleriano de definição da função gama

$$\int_0^{\infty} du e^{-u} u^n = n! \quad (3.1.54)$$

Como vimos, estes estados coerentes estão associados ao grupo das translações  $U(1)$ . É igualmente possível desenvolver estados coerentes e o integral de caminho associados a outros grupos, como os grupos  $SU(2)$  ou  $O(3)$  associados ao spin (ou mais geralmente ao momento angular) e às rotações. Em geral, devido ao facto de os (anti)comutadores da álgebra dos operadores não serem constantes mas sim operadores, o produto interno desses estados coerentes não são simples exponenciais de formar quadráticas e a medida de integração da decomposição da identidade não é uma constante. O integral de caminho não é portanto gaussiano e o teorema de Wick que encontraremos para bósons e fermiões deixa de ser válido, em geral.

## 3.2 Representação Holomorfa

Tal como já referimos, as variáveis  $\alpha$  e  $\alpha^*$  devem ser tratadas como variáveis independentes. O operador  $D(\alpha)$  e os estados  $|\alpha\rangle$  dependem de facto de ambas. No entanto, os estados

$$|\alpha\rangle = |\alpha\rangle e^{\frac{1}{2}\alpha^*\alpha} \quad (3.2.1)$$

$$= e^{a^\dagger\alpha}|0\rangle \quad (3.2.2)$$

dependem apenas de  $\alpha$ . De uma forma análoga, os estados

$$\langle\alpha| = \langle\alpha| e^{\frac{1}{2}\alpha^*\alpha} \quad (3.2.3)$$

$$= \langle 0| e^{\alpha^*a} \quad (3.2.4)$$

dependem apenas de  $\alpha^*$ .

O produto interno destes estados é dado por

$$\langle\beta|\hat{1}|\alpha\rangle = e^{\beta\alpha} \quad (3.2.5)$$

A partir da equação (3.1.47) obtemos imediatamente a decomposição da identidade em termos destes estados

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{-\alpha^*\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{1} \quad (3.2.6)$$

e, portanto, a medida de integração na representação holomorfa é  $e^{-\alpha^*\alpha}$ .

Estes estados  $|\alpha\rangle$  e  $\langle\alpha|$ , embora não normalizados, continuam a ser vectores próprios (à direita e à esquerda) dos operadores  $a$  e  $a^\dagger$ , respectivamente, mantendo assim a motivação para o seu uso.

Ao trabalharmos com um operador qualquer  $\hat{A}$ , em vez de calcularmos os elementos de matriz  $\langle\beta|\hat{A}|\alpha\rangle$  que dependem, em geral, de  $\alpha$ ,  $\alpha^*$ ,  $\beta$  e  $\beta^*$ , é preferível usar os elementos de matriz  $\langle\beta|A|\alpha\rangle$  que dependem apenas de  $\beta^*$  e  $\alpha$ , e aos quais daremos o nome de representante  $A(\beta^*, \alpha)$  do operador  $\hat{A}$  na representação holomorfa. A relação com a expressão normalmente ordenada  $A_N(\beta^*, \alpha)$  que se obtém ordenando normalmente o operador  $\hat{A}$  e fazendo a substituição  $a^\dagger \rightarrow \alpha^*$  e  $a \rightarrow \alpha$ , é dada por

$$A(\beta^*, \alpha) = \langle\beta|A|\alpha\rangle = A_N(\beta^*, \alpha) e^{\beta^*\alpha} \quad (3.2.7)$$

O representante da identidade é dado pelo produto interno dos novos estados

$$\langle \beta | \hat{1} | \alpha \rangle = e^{\beta^* \alpha} \quad (3.2.8)$$

Como exemplo, calculemos o representante do operador de evolução livre na representação holomorfa. Para isso, começamos por notar que, para uma teoria livre, de hamiltoniano, sem energia de ponto zero, dado por

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \omega_0 a^\dagger a \quad (3.2.9)$$

os estados coerentes seguem as equações clássicas de movimento tendo-se

$$e^{-\hat{\mathcal{H}}_0 t} | \alpha \rangle = | e^{-i\omega_0 t} \alpha \rangle \quad (3.2.10)$$

de acordo com a eq. (3.1.35).

O representante do operador de evolução para uma teoria livre na representação holomorfa é portanto dado por

$$\begin{aligned} K_0(\alpha_f^*, t_f; \alpha_i, t_i) &= \langle \alpha_f | e^{-i\hat{\mathcal{H}}_0(t_f-t_i)} | \alpha_i \rangle \\ &= \langle \alpha_f | \hat{1} | e^{-i\omega_0(t_f-t_i)} \alpha_i \rangle \\ &= e^{\alpha_f^* e^{-i\omega_0(t_f-t_i)} \alpha_i} \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

uma simples exponencial quadrática.

Em geral, a equação de evolução do representante do operador de evolução é

$$i \frac{\partial}{\partial t_f} K(\alpha_f^*, t_f; \alpha, t_i) = \int d^2 \beta e^{-\beta^* \beta} \hat{\mathcal{H}}_N(\alpha_f^*, \beta) e^{\beta^* \alpha} K(\alpha^*, t_f; \alpha_i, t_i) \quad (3.2.12)$$

a qual se obtém facilmente a partir da equação de evolução do operador de evolução.

A representação holomorfa está intimamente relacionada com o produto normalmente ordenado. De facto, de acordo com a eq. (3.2.7), a passagem do representante para a expressão normalmente ordenada faz-se simplesmente multiplicando por  $e^{\beta^* \alpha}$ . É possível desenvolver outras representações em particular as representações simétricas e antinormalmente ordenadas. Como os operadores  $D(\alpha)$  se podem escrever facilmente nestas diferentes formas, eles desempenham um papel fundamental no desenvolvimento das diferentes representações e na passagem de uma para as outras.

### 3.3 Integral de caminho para operador de evolução na representação holomorfa

Usando a decomposição da identidade em termos dos estados coerentes e a expressão para o seu produto interno, a construção do integral de caminho para os elementos de matriz do operador de evolução é imediata. Seguindo a via já anteriormente usada, começamos por escrever

$$\begin{aligned} K(\alpha_f^*, t_f; \alpha_i, t_i) &= \langle \alpha_f \| e^{-i\hat{\mathcal{H}}(t_f-t_i)} \| \alpha_i \rangle = \langle \alpha_f \| (e^{-i\hat{\mathcal{H}}\Delta t})^N \| \alpha_i \rangle \\ &= \int \prod_{k=1}^{N-1} d^2\alpha_k e^{-\alpha_k^* \alpha_k} \prod_{k=0}^{N-1} \langle \alpha_{k+1} \| e^{-i\hat{\mathcal{H}}\Delta t} \| \alpha_k \rangle \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

em que  $\Delta t = \frac{t_f-t_i}{N}$ . Passando a usar o hamiltoniano normalmente ordenado,  $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_N(a^\dagger, a)$ , e conservando os termos até à ordem  $1/N$  apenas, temos

$$\begin{aligned} \langle \alpha_{k+1} \| e^{-i\hat{\mathcal{H}}\Delta t} \| \alpha_k \rangle &\simeq \langle \alpha_{k+1} \| (1 - i\hat{\mathcal{H}}\Delta t) \| \alpha_k \rangle \\ &= \langle \alpha_{k+1} \| \hat{\mathbb{1}} \| \alpha_k \rangle \left[ 1 - i \frac{\langle \alpha_{k+1} \| \hat{\mathcal{H}} \| \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_{k+1} \| \hat{\mathbb{1}} \| \alpha_k \rangle} \Delta t \right] \\ &= \langle \alpha_{k+1} \| \hat{\mathbb{1}} \| \alpha_k \rangle \left[ 1 - i\mathcal{H}_N(\alpha_{\parallel+\infty}^*, \alpha_{\parallel}) \cdot \Delta t \right] \\ &\simeq e^{\alpha_{k+1}^* \alpha_k - i\mathcal{H}_N(\alpha_{\parallel+\infty}^*, \alpha_{\parallel}) \cdot \Delta t} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

tendo usado as equações de definição dos estados coerentes.

Obtemos assim o seguinte integral de caminho para o operador de evolução na representação holomorfa

$$\begin{aligned} K(\alpha_f^*, t_f; \alpha_i, t_i) &= \langle \alpha_f \| U(t_f, t_i) \| \alpha_i \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^{N-1} d^2\alpha_k \exp\left(\frac{1}{2}(\alpha_N^* \alpha_{N-1} + \alpha_1^* \alpha_0)\right) \\ &\quad \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-2} ((\alpha_{k+1}^* - \alpha_k^*) \alpha_k - \alpha_{k+1}^* (\alpha_{k+1} - \alpha_k))\right) \\ &\quad \left. - i \sum_{k=0}^{N-1} \hat{H}_N(\alpha_{k+1}^* \alpha_k) \Delta t \right) \quad (3.3.3) \\ &= \int \mathcal{D}^2 \exp\left(\frac{1}{2}(\alpha_f^* \alpha(t_f) + \alpha^*(t_i) \alpha_i)\right) \\ &\quad \exp\left(\int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha^*}{dt} \alpha - \alpha^* \frac{d\alpha}{dt}\right) - i\hat{\mathcal{H}}_N(\alpha^*, \alpha)\right) dt\right) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

tendo definido

$$\mathcal{D}^2\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{N-1} d^2\alpha_k \quad (3.3.5)$$

e

$$\frac{d\alpha}{dt} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\Delta t} \quad (3.3.6)$$

$$\frac{d\alpha^*}{dt} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{k+1}^* - \alpha_k^*}{\Delta t} \quad (3.3.7)$$

Depende de facto apenas de  $\alpha_i, \alpha_f^*$  e não de  $\alpha_i^*, \alpha_f$ . As variáveis  $\alpha$  e  $\alpha^*$  são independentes. As trajectórias para o cálculo do integral de caminho satisfazem as condições fronteira  $\delta\alpha_i = \delta\alpha_f^* = 0$ , sendo portanto  $\alpha(t_f)$  e  $\alpha^*(t_i)$  os valores que  $\alpha$  e  $\alpha^*$  formam para  $t = t_f$  e  $t = t_i$  respectivamente, não sendo portanto variáveis independentes.

Estas condições fronteira estão de acordo com as que se obtêm para as equações de movimento ao derivarmos as equações de Dyson-Schwinger ou ao fazermos a aproximação da fase estacionária. Ao variarmos as trajectórias, a variação da acção, incluindo os termos fronteira, é dada por

$$\begin{aligned} \delta iS &= (\delta\alpha_f^*)\alpha(t_f) + \alpha^*(t_i)\delta\alpha_i \\ &+ i \int_{t_i}^{t_f} [\delta\alpha^* (i \frac{d\alpha}{dt} - \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial \alpha^*}) + (-i \frac{d\alpha^*}{dt} - \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial \alpha}) \delta\alpha] dt. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

As equações de movimento (válidas em médias apenas, no caso das equações de Dyson-Schwinger) são dadas por

$$i \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial \alpha^*} \quad (3.3.9)$$

$$-i \frac{d\alpha^*}{dt} = \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial \alpha} \quad (3.3.10)$$

com as condições fronteira

$$\delta\alpha_i = 0 \quad (3.3.11)$$

$$\delta\alpha_f^* = 0 \quad (3.3.12)$$

É interessante notar que os termos fronteira no integral de caminho na representação holomorfa são os necessários para, conjuntamente com os termos obtidos por primitivação por partes vindos do integral no tempo, obtermos

estas condições fronteira. As quantidades  $\alpha(t_f)$  e  $\alpha^*(t_i)$  são assim obtidas resolvendo as equações de movimento com as condições fronteira, de modo a determinarmos as soluções  $\alpha(t)$  e  $\alpha^*(t)$  e fazendo então  $t = t_f$  e  $t = t_i$ , respectivamente.

### 3.4 Fermiões e Variáveis de Grassmann

Até aqui temos estado a considerar apenas o tratamento de bosões. Os fermiões, que são caracterizados por relações de anticomutação em vez de relações de comutação, podem ser tratados de uma forma análoga. Para isso, é necessário introduzir variáveis clássicas que anticomutam, ou seja, as chamadas variáveis de Grassmann.

As variáveis de Grassmann  $\alpha_i$  e  $\alpha_i^*$  definem-se pelas suas propriedades algébricas

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0 \quad (3.4.1)$$

$$\{\alpha_i^*, \alpha_j^*\} = 0 \quad (3.4.2)$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j^*\} = 0 \quad (3.4.3)$$

Como consequência, o quadrado de uma variável de Grassmann é zero, e qualquer função de um número finito de variáveis de Grassmann é um polinómio, sendo o monómio de grau mais alto aquele que tem o produto de todas as variáveis.

As relações de anticomutação das eq. (3.4.1) e (3.4.2) e, em particular, da eq. (3.4.3) podem-se motivar argumentando que, se na definição dos operadores de criação  $a_i^\dagger$  e de destruição  $a_j$  para fermiões, não tivéssemos absorvido a constante de Planck (à semelhança do que fizemos no caso de bosões) eles teriam anticomutadores dados por

$$\{a_i, a_i^\dagger\} = \hbar\delta_{ij} \quad (3.4.4)$$

e que, no limite  $\hbar \rightarrow 0$ , teríamos variáveis clássicas satisfazendo as referidas relações de anticomutação. Outro argumento é dizer que as funções de correlação de fermiões são antisimétricas na troca de dois campos e que a introdução de fontes que anticomutam conduzirão automaticamente a este resultado, tal como veremos. Finalmente, a relação entre (anti)comutadores

e parêntesis de Poisson da mecânica analítica é também mantida usando estas variáveis.

As operações envolvendo variáveis de Grassmann definem-se de forma a respeitar sempre que possível as regras usuais. Assim, a soma de variáveis de Grassmann e a multiplicação de variáveis de Grassmann por números complexos não requerem definições especiais. O complexo conjugado faz corresponder a cada variável  $\alpha$  a variável  $\alpha^*$  de acordo com

$$(\alpha^*)^* = \alpha \quad (3.4.5)$$

$$(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^* \quad (3.4.6)$$

e, tal como o conjugado hermítico dos operadores, inverte a ordem do produto. Uma variável de Grassmann diz-se real se coincide com o seu complexo conjugado.

A diferenciação segue as regras usuais, tendo-se de manter, porém, a ordem relativa dos factores (tal como acontece no produto externo, por exemplo) de acordo com

$$d(\alpha\beta) = (d\alpha)\beta + \alpha(d\beta) \quad (3.4.7)$$

Na derivação temos, porém, de indicar por que lado foi retirada a diferencial da variável em ordem à qual se derivou. Temos portanto de distinguir entre derivadas esquerdas  $\overrightarrow{\partial} / \partial\alpha$  e direitas  $\overleftarrow{\partial} / \partial\alpha$  conforme a diferencial  $d\alpha$  tenha sido movida para a esquerda ou para a direita. Assim por exemplo, temos

$$\frac{\overrightarrow{\partial}(\alpha\beta)}{\partial\alpha} = \beta \quad (3.4.8)$$

$$\frac{\overleftarrow{\partial}(\alpha\beta)}{\partial\alpha} = -\beta \quad (3.4.9)$$

A integração continua a gozar das propriedades usuais de linearidade. Uma propriedade extremamente importante dos integrais usuais é a invariância para translações na variável de integração i.e. a propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \quad (3.4.10)$$

Embora a integração para variáveis de Grassmann seja definida como uma operação formal que a cada função dessa variável faz corresponder em número

e, em particular, não faça sentido falar de domínio de integração, a integração para variáveis de Grassmann, por definição, é invariante para translações, tendo-se

$$\int f(\alpha - \beta)dx = \int f(\alpha)d\alpha \quad (3.4.11)$$

o que nos permitirá, em particular, calcular integrais gaussianos “completando o quadrado”. Como consequência da eq. (3.4.11), temos

$$\int (\alpha - \beta)d\alpha = \int \alpha d\alpha - \beta \int d\alpha = \int \alpha d\alpha$$

e portanto terá de ser

$$\int d\alpha = 0 \quad (3.4.12)$$

bem como

$$\int d\alpha^* = 0 \quad (3.4.13)$$

que pode ser obtida por conjugação complexa da relação anterior. Como  $\alpha^2 = 0$ , só nos resta definir  $\int \alpha d\alpha$ . No caso de variáveis de Grassmann reais  $\zeta$  a definição natural a usar é

$$\int \zeta d\zeta = i \quad (3.4.14)$$

tendo fixado arbitrariamente uma constante real e positiva. No caso de campos complexos podemos usar esta definição para os integrais das suas partes real e imaginária. Alternativamente podemos definir

$$\int \alpha d\alpha = 1 \quad (3.4.15)$$

$$\int d\alpha^* \alpha^* = 1 \quad (3.4.16)$$

Definindo

$$d^2\alpha = d\alpha d\alpha^* \quad (3.4.17)$$

o único integral diferente de zero, envolvendo  $\alpha$  e  $\alpha^*$ , será finalmente dado por

$$\int \alpha^* \alpha d\alpha d\alpha^* = -1 \quad (3.4.18)$$

que usaremos repetidamente. Este mesmo resultado teria sido obtido se tivéssemos partido dos integrais das partes real e imaginária, usando a regra de mudança de variáveis de integração, que passamos a analisar.

A mudança de variáveis de integração é feita de um modo semelhante ao usual, com a diferença de que em vez de se multiplicar, divide-se pelo jacobiano da transformação i.e, temos

$$\int f(\alpha) d^n \alpha = \int f(\alpha(\beta)) \left| \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \right|^{-1} d^n \beta \quad (3.4.19)$$

A demonstração para uma transformação linear da forma

$$\alpha_i = \sum_j A_{ij} \beta_j \quad (3.4.20)$$

sendo  $A_{ij}$  números complexos, é imediata, pois como

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = \det A \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \quad (3.4.21)$$

para que se tenha simultaneamente

$$1 = \int \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n d\alpha_n \dots d\alpha_1 = (\det A) \int \beta_1 \dots \beta_n d\alpha_n \dots d\alpha_1 \quad (3.4.22)$$

e

$$1 = \int \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n d\beta_n \dots d\beta_2 d\beta_1 \quad (3.4.23)$$

deverá ser

$$d\alpha_n \dots d\alpha_1 = (\det A)^{-1} d\beta_n \dots d\beta_1, \quad (3.4.24)$$

Pode-se mostrar que para transformações de coordenadas mais gerais o resultado da eq. (3.1.80) continua a ser válido.

Esta propriedade é particularmente importante pois está associado à introdução dos chamados campos “fantasmas” e ao desenvolvimento das teorias supersimétricas em teoria quântica dos campos, e no estudo de sistemas desordenados, em física da matéria condensada.

As variáveis de Grassmann e os operadores fermiônicos anticomutam, tendo-se

$$\{a^\dagger, \alpha\} = \{a^\dagger, \alpha^*\} = \{a, \alpha\} = \{a, \alpha^*\} = 0 \quad (3.4.25)$$

Finalmente, se definirmos que

$$\alpha |0\rangle = |0\rangle \alpha \quad (3.4.26)$$

concluimos, usando a primeira das relações de anticomutação das eq. (3.1.86) que

$$\alpha |1\rangle = -|1\rangle \alpha \quad (3.4.27)$$

mostrando o cuidado que devemos ter ao introduzirmos um conjunto mínimo, i.e, coerente e não redundante, de definições, a partir das quais definimos as outras relações.

### 3.5 Estados coerentes para fermiões

Vimos que os estados coerentes eram particularmente úteis na construção do integral de caminho para bosões pois eles eram vectores próprios à direita e à esquerda dos operadores de distribuição e criação, respectivamente.

A fim de desenvolvermos um formalismo semelhante para fermiões começaremos por introduzir os estados coerentes para fermiões, os quais, tal como anteriormente, são vectores próprios dos operadores de criação e de destruição. Começaremos igualmente por considerar apenas um único grau de liberdade fermiónico, fazendo depois a passagem para muitos graus de liberdade.

O estado coerente  $|\alpha\rangle$  satisfaz assim, por definição, a equação

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (3.5.1)$$

sendo  $a$  o operador de destruição fermiónico e  $\alpha$  uma variável de Grassmann (e não um número complexo).

Fazendo o produto interno com os estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , obtemos

$$\langle 1|\alpha\rangle = \alpha\langle 0|\alpha\rangle \quad (3.5.2)$$

$$\alpha\langle 1|\alpha\rangle = 0 \quad (3.5.3)$$

Escolhendo  $\langle 0|\alpha\rangle$  real e par em  $\alpha, \alpha^*$ , i.e, da forma

$$\langle 0|\alpha\rangle = u + v\alpha^*\alpha$$

com  $u$  real, positivo e  $v$  real, obtemos imediatamente

$$\langle 1|\alpha\rangle = u\alpha$$

Para que o estado coerente seja normalizado, terá de ser

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = u^2 + u(u + 2v)\alpha^*\alpha = 1$$

ou seja,  $u = 1$ ,  $v = -\frac{1}{2}$ . O estado coerente é finalmente dado por

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= (1 - \frac{1}{2}\alpha^*\alpha)|0\rangle - \alpha|1\rangle = (1 - \frac{1}{2}\alpha^*\alpha)(1 + a^\dagger\alpha)|0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}\alpha^*\alpha}e^{a^\dagger\alpha}|0\rangle \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

$$= e^{a^\dagger\alpha - \alpha^*a}|0\rangle \quad (3.5.5)$$

As duas últimas expressões são formalmente iguais às obtidas no caso dos bosões. Analisaremos mais tarde a razão deste facto.

Usando uma destas equações e a eq. (3.4.27) é fácil verificar que

$$\beta|\alpha\rangle = |\alpha\rangle\beta \quad (3.5.6)$$

O produto interno de dois estados coerentes é dado por

$$\begin{aligned} \langle\beta|\alpha\rangle &= (1 - \frac{1}{2}\beta^*\beta)(1 - \frac{1}{2}\alpha^*\alpha) + \beta^*\alpha \\ &= e^{-\frac{1}{2}\beta^*\beta - \frac{1}{2}\alpha^*\alpha + \beta^*\alpha} \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

$$= e^{\frac{1}{2}(\beta^* - \alpha^*)\alpha - \frac{1}{2}\beta^*(\beta - \alpha)} \quad (3.5.8)$$

De novo as duas últimas expressões coincidem com as obtidas no caso de bosões.

Finalmente, é fácil verificar que a identidade pode também ser decomposta usando os estados coerentes, tendo-se

$$\int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{1} \quad (3.5.9)$$

A construção do integral de caminho para bosões feita das eqs. (3.1.54) até à eq. (3.1.62) usou apenas as eqs. (3.1.18), (3.1.19), (3.1.45) e (3.1.51) e que formalmente são as mesmas que as eqs. (3.1.89) e complexo conjugado, (3.1.96) e (3.1.97). Concluimos assim que aquela derivação é igualmente válida para fermiões desde que as variáveis clássicas que ali apareciam sejam interpretadas como variáveis de Grassmann.

$$\begin{aligned} \delta iS &= (\delta\alpha_f^*)\alpha(t_f) + \alpha^*(t_i)\delta\alpha_i \\ &+ i \int_{t_i}^{t_f} [\delta\alpha^* (i\frac{d\alpha}{dt} - \frac{\vec{\partial}\hat{\mathcal{H}}}{\partial\alpha^*}) + (-i\frac{d\alpha^*}{dt} - \frac{\vec{\partial}\hat{\mathcal{H}}}{\partial\alpha})\delta\alpha] dt. \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

$$i \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\vec{\partial} \hat{\mathcal{H}}}{\partial \alpha^*} \quad (3.5.11)$$

$$-i \frac{d\alpha^*}{dt} = \frac{\overleftarrow{\partial} \hat{\mathcal{H}}}{\partial \alpha} \quad (3.5.12)$$

### 3.6 Comparação entre os estados coerentes para bosões e fermiões

Vimos que havia profundas analogias entre as propriedades dos estados coerentes para bosões e fermiões. Elas resultam do facto de o (anti)comutador dos operadores correspondentes ser um número (e não um operador) em ambos os casos.

Os estados coerentes são obtidos por acção do operador

$$D(\alpha) = e^{a^\dagger \alpha - \alpha^* a} \quad (3.6.1)$$

no vácuo  $|0\rangle$ , o qual satisfaz

$$a|0\rangle = 0 \quad (3.6.2)$$

No caso dos bosões,  $\alpha$  e  $\alpha^*$  são números complexos e no caso dos fermiões são variáveis de Grassmann. O operador  $D(\alpha)$  e consequentemente o estado coerente  $|\alpha\rangle$  é de facto função não só de  $\alpha$  mas também de  $\alpha^*$ , sendo  $\alpha$  e  $\alpha^*$  variáveis independentes.

A expressão da eq. (3.1.98) para o operador  $D(\alpha)$  é a expressão (anti)simétrica ou de Weyl, pois, desenvolvendo a exponencial em série de potências, obtemos uma expressão (anti)simétrica em  $a, a^\dagger$ . Usando a identidade

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \quad (3.6.3)$$

a qual é válida se

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0 \quad (3.6.4)$$

verificamos que o operador  $D(\alpha)$  também pode ser escrito da forma

$$D(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}\alpha^* \alpha} e^{a^\dagger \alpha} e^{-\alpha^* a} \quad (3.6.5)$$

$$= e^{+\frac{1}{2}\alpha^* \alpha} e^{-\alpha^* a} e^{a^\dagger \alpha} \quad (3.6.6)$$

que é respectivamente a expressão ordenada normal ou antinormalmente, pois, por desenvolvimento em série, obtemos produtos ordenados normal ou antinormalmente, respectivamente.

O comutador para a eq. (3.1.100) pode ser obtido usando as identidades:

$$[AB, C] = A[B, C] - [C, A]B \quad (3.6.7)$$

$$= A\{B, C\} - \{C, A\}B \quad (3.6.8)$$

e

$$[A, BC] = [A, B]C - B[C, A] \quad (3.6.9)$$

$$= \{A, B\}C - B\{C, A\} \quad (3.6.10)$$

O paralelismo entre os estados coerentes para bosões e fermiões, decorre da invariância destas expressões ao substituirmos comutadores por anticomutadores (e vice-versa).

Estas expressões podem ser combinadas para obtermos

$$[AB, CD] = A[B, C]D - AC[D, B] - C[D, A]B + [A, C]DB \quad (3.6.11)$$

$$= A\{B, C\}D - AC\{D, B\} - C\{D, A\}B + \{A, C\}D \quad (3.6.12)$$

ou equivalentemente

$$[AB, CD] = A[B, C]D + CA[B, D] - C[D, A]B - [C, A]BD \quad (3.6.13)$$

$$= A\{B, C\}D + CA\{B, D\} - C\{D, A\}B - \{C, A\}B \quad (3.6.14)$$

Diferenciando as eqs. (3.1.102) e (3.1.103) em ordem a  $\alpha^*$  e  $\alpha$  ou usando a identidade

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \dots \quad (3.6.15)$$

verificamos que os operadores  $D(\alpha)$  estão associados às translações, pois

$$D^{-1}(\alpha)aD(\alpha) = a + \alpha \quad (3.6.16)$$

$$D^{-1}(\alpha)a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^* \quad (3.6.17)$$

o que justifica os resultados obtidos ao calcularmos a função de onda do estado coerente para bosões  $\psi_\alpha(x)$ , dada pela eq. (3.1.38). São estas propriedades que justificam que os estados coerentes sejam obtidos a partir do vácuo por acção dos operadores  $D(\alpha)$ . De facto, multiplicando à direita (ou

à esquerda) a eq. (3.6.16) ou (3.6.17) pelo vácuo, obtemos imediatamente as equações de definição dos estados coerentes como vectores próprios dos operadores de destruição (ou de criação).

O produto de dois operadores  $D(\beta)$  e  $D(\alpha)$  dado por

$$D(\beta)D(\alpha) = D(\beta + \alpha)e^{\frac{1}{2}(\alpha^*\beta - \beta^*\alpha)} \quad (3.6.18)$$

está de acordo com esta propriedade de translação pois à parte uma constante multiplicativa (de importância fundamental no desenvolvimento do integral de caminho) é o operador  $D(\beta + \alpha)$  cujo argumento é a soma dos argumentos dos factores. Como consequência desta propriedade de translação, o estado  $D(\beta)|\alpha\rangle$  é vector próprio do operador  $a$  com valor próprio  $\beta + \alpha$  pois

$$D(\beta)|\alpha\rangle = e^{\frac{1}{2}(\alpha^*\beta - \beta^*\alpha)}|\beta + \alpha\rangle \quad (3.6.19)$$

Finalmente, o produto interno de dois estados decorre da eq. (3.5.18) pois

$$\begin{aligned} \langle \beta|\alpha\rangle &= \langle 0|D(-\beta)D(\alpha)|0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}(\alpha^*\beta - \beta^*\alpha)}e^{-\frac{1}{2}(-\beta^* + a^*)(-\beta + \alpha)} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\beta^*\beta - \frac{1}{2}\alpha^*\alpha + \beta^*\alpha} \end{aligned} \quad (3.6.20)$$

tal como encontrámos anteriormente.

A decomposição da identidade resulta de em ambos os casos termos

$$\int e^{-\alpha^*\alpha}d^2\alpha = 1 \quad (3.6.21)$$

sendo  $d^2\alpha$  dado pelas eqs. (3.1.48) e (3.1.17) e consequentemente, usando a invariância para translações, temos

$$\int e^{-\alpha^*\alpha}\alpha^n(\alpha^*)^m d^2\alpha = n!\delta_{n,m} \quad (3.6.22)$$

(com  $n = 0, 1, 2, \dots$  no caso de bosões e  $n = 0, 1$  apenas, no dos fermiões) o que conduz a

$$\begin{aligned} \int |\alpha\rangle d^2\alpha \langle \alpha| &= \int e^{-\frac{1}{2}\alpha^*\alpha}e^{a^\dagger\alpha}|0\rangle d^2\alpha \langle 0|e^{\alpha^*a}e^{-\frac{1}{2}\alpha^*\alpha} \\ &= \sum_{n,m} \frac{(a^\dagger)^n}{n!}|0\rangle \int e^{-\alpha^*\alpha}\alpha^n(\alpha^*)^m d^2\alpha \langle 0|\frac{a^m}{m!} \\ &= \sum_n |n\rangle\langle n| = \hat{1} \end{aligned} \quad (3.6.23)$$

Verificamos assim, que a semelhança formal que tínhamos encontrado entre bosões e fermiões tem, de facto, uma razão profunda.

### 3.7 Integral de caminho para uma teoria livre

Tal como já foi referido, em geral não é possível resolver exactamente um problema com interacções, sendo necessário recorrer a métodos de aproximação. No caso de bosões e fermiões toma-se normalmente como teoria livre a parte quadrática do hamiltoniano e a parte restante como interacção. No próximo capítulo começaremos a discutir formas de tratar as interacções.

Consideremos agora uma teoria sem interacções. Como os diferentes modos normais estão desacoplados, consideremos apenas um deles, com energia  $\hbar\omega_0$ . Juntando um termo de fontes  $\eta$ ,  $\eta^*$  o seu hamiltoniano é dado por

$$\hat{\mathcal{H}}/\hbar = \omega_0 a^\dagger a - \eta^* a - a^\dagger \eta \quad (3.7.1)$$

Sendo o hamiltoniano quadrático o integral de caminho é gaussiano e pode ser calculado exactamente, sendo dado pelo produto de dois factores: uma exponencial, dada pelo ponto de estacionaridade da acção e um prefactor que se obtém calculando o determinante da parte quadrática da acção. O ponto de estacionaridade da acção obtém-se resolvendo as equações de movimento, que para o hamiltoniano da eq. (3.6.1) tomam a forma

$$\frac{d\alpha}{dt} = -i\omega_0\alpha + i\eta \quad (3.7.2)$$

$$\frac{d\alpha^*}{dt} = i\omega_0\alpha^* - i\eta^* \quad (3.7.3)$$

com as condições fronteira  $\alpha(t_i) = \alpha_i$ ,  $\alpha^*(t_f) = \alpha_f^*$ . A solução é dada por

$$\alpha(t) = e^{-i\omega_0(t-t_i)}\alpha_i + i \int_{t_i}^t dt' e^{-i\omega_0(t-t')} \eta(t') \quad (3.7.4)$$

$$\alpha^*(t) = \alpha_f^* e^{-i\omega_0(t_f-t)} + i \int_t^{t_f} dt' \eta^*(t') e^{i\omega_0(t-t')} \quad (3.7.5)$$

o qual mostra que  $\alpha(t)$ ,  $\alpha^*(t)$  são variáveis independentes. A acção é dada por

$$\frac{i}{\hbar} S_0 = \frac{1}{2}(\alpha_f^* \alpha(t_f) + \alpha^*(t_i) \alpha_i) \quad (3.7.6)$$

$$+ \int_{t_i}^{t_f} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\alpha^*}{dt} \alpha - \alpha^* \frac{d\alpha}{dt} \right) - i\omega_0 \alpha^* \alpha + i\eta^* \alpha + i\alpha^* \eta \right] dt \quad (3.7.7)$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha_f^* \alpha(t_f) + \alpha^*(t_i) \alpha_i) + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} (\eta^* \alpha + \alpha^* \eta) dt \quad (3.7.8)$$

tendo usado as equações de movimento. Substituindo as soluções dadas pelas eqs. (3.6.4) e (3.6.5) e usando a identidade

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \int_t^{t_f} dt' F(t, t') = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t dt' F(t', t) \quad (3.7.9)$$

obtemos finalmente que

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} S_0 &= \alpha_f^* e^{-i\omega_0(t_f-t_i)} \alpha_i \\ &+ i\alpha_f^* \int_{t_i}^{t_f} dt e^{-i\omega_0(t_f-t)} \eta(t) + i \int_{t_i}^{t_f} dt \eta^*(t) e^{-i\omega_0(t-t_i)} \alpha_i \\ &- \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t dt' \eta^*(t) e^{-i\omega_0(t-t')} \eta(t') \end{aligned} \quad (3.7.10)$$

O resultado da eq. (3.2.9) dispensa-nos do cálculo do determinante da parte quadrática da acção, o qual, no entanto, pode ser facilmente calculado usando a aproximação discreta para o integral de caminho e escrevendo

$$-\frac{1}{2}\alpha_{N-1}^* \alpha_{N-1} - \frac{1}{2}\alpha_1^* \alpha_1 + \sum_{k=1}^{N-2} \left( \frac{1}{2} [(\alpha_{k+1}^* - \alpha_k^*) \alpha - \alpha_{k+1}^* (\alpha_{k+1} - \alpha_k)] - i\omega_0 \Delta t \alpha_{k+1}^* \right) \quad (3.7.11)$$

na forma  $-\frac{1}{2}\alpha^\dagger A \alpha$ , em que

$$A = -(\alpha_1^* \cdots \alpha_{N-1}^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ (-1 + i\omega_0 \Delta t) & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & (-1 + i\omega_0 \Delta t) & 1 & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_{N-1} \end{pmatrix} \quad (3.7.12)$$

e  $\alpha^\dagger = (\alpha_1^* \cdots \alpha_{N-1}^*)$ . O determinante desta matriz é um, mesmo para  $\omega_0 \neq 0$ . A equação aos valores próprios é dada por

$$\alpha_1 = \lambda \alpha_1 \quad (3.7.13)$$

$$(1 - \lambda) \alpha_k = (1 - i\omega_0 \Delta t) \alpha_{k-1}, \quad (3.7.14)$$

para  $k = 2, \dots, N-1$ . Definindo  $\alpha_0 = 0$ , a eq. (3.6.10) pode ser obtido do caso geral, fazendo  $k = 1$ . Para  $\lambda \neq 1$ ,  $\alpha_0 = 0$  implica  $\alpha_k = 0$ , para

$k = 1, \dots, N - 1$ . O único valor próprio é portanto  $\lambda = 1$ . O vector próprio (normalizado) correspondente é

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.7.15)$$