TRANSIÇÕES DE FASE
Curso de Engenharia Física Tecnológica
Série M

1. a) Calcule o integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

(sugestão: calcule o quadrado do integral usando coordenadas polares).

b) Fazendo uma mudança de variáveis mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma}+xy} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma}} = e^{\frac{\sigma y^2}{2}}$$

c) Fazendo a expansão em potências de y, mostre que os momentos da distribuição de probabilidade $\rho(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}}{\sqrt{2\pi\sigma}}$ são dados por $< x^{2n+1} >= 0$, $< x^{2n} >= (2n-1)!! < x^2 >^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, sendo $< x^2 >= \sigma$. Este resultado é talvez o exemplo mais simples do teorema de Wick.

d) Fazendo uma mudança de variáveis mostre, a partir do resultado da alínea a), que

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\pi}$$

2. As funções $\Gamma(x)$ e $B(x, y)$ de Euler são definidas por

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \\ B(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \end{aligned}$$

a) Mostre que

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \\ \Gamma(n) &= (n-1)! \\ \Gamma(\frac{1}{2}) &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

b) Por mudanças de variável obtenha outras possíveis definições das funções $\Gamma(x)$ e $B(x,y)$

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= 2\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1} du \qquad (1) \\ B(x,y) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta d\theta \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du \end{aligned}$$

c) Por mudança de variáveis a partir da expressão para $\Gamma(x)\Gamma(y)$ obtenha

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Use as definições iniciais ou as expressões da alínea anterior.

3. a) Aplique o método de Laplace para o cálculo de um integral e obtenha a expansão

$$I(\epsilon) = \int e^{-\frac{1}{\epsilon}f(x)} dx \simeq e^{-\frac{1}{\epsilon}f(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi\epsilon}{f''(x_0)}} \left[1 + \epsilon \left(-\frac{1}{8} \frac{f'^{v}(x_0)}{(f''(x_0))^2} + \frac{5}{24} \frac{(f'''(x_0))^2}{(f''(x_0))^3} \right) + \cdots \right].$$

b) Como aplicação concreta, obtenha a fórmula de Stirling

$$n! = \int_0^\infty dx e^{-x} x^n \simeq e^{-n+n\ln n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \cdots \right).$$

c) Faça o gráfico das diferentes aproximações dadas pela fórmula de Stirling à função $\Gamma(x)$, em função de x.

4. A função de Bessel $J_\nu(z)$ pode ser definida por

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi e^{\pm iz\cos\varphi} \sin^{2\nu}\varphi d\varphi \\ &= 2\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\cos\varphi) \sin^{2\nu}\varphi d\varphi \\ &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos ztdt \end{aligned}$$

com $\Re\nu > -\frac{1}{2}$.

a) Mostre que a função de Bessel $J_\nu(z)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2 J_\nu(z)}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dJ_\nu(z)}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) J_\nu(z) = 0$$

b) Mostre que a função de Bessel $J_\nu(z)$ tem a seguinte expansão em série de potências

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

com $|\arg z| < \pi$.

Nota: $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n}$, $(2n)! = (2n-1)!!2^n n!$, o que implica $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}$, caso particular de $2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z)$, fórmula de duplicação da função $\Gamma(z)$.

c) Obtenha os casos particulares

$$\begin{aligned} J_{-\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \\ J_{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \end{aligned}$$

5. a) O integral a d dimensões de uma função que só depende da coordenada radial $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$, é dado por

$$\int f(r) d^d x = \int_0^\infty f(r) S_d r^{d-1} dr$$

Mostre que $S_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$ escolhendo $f(r) = e^{-\frac{r^2}{2}}$.

b) As coordenadas esféricas a d dimensões são dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{d-3}\sin\theta_{d-2}\sin\varphi \\ x_2 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{d-3}\sin\theta_{d-2}\cos\varphi \\ x_3 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{d-3}\cos\theta_{d-2} \\ \ldots & \quad \ldots \\ x_{d-2} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ x_{d-1} &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ x_d &= r\cos\theta_1 \end{aligned}$$

em que $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Mostre que $r, \theta_1, \ldots, \theta_{d-2}, \varphi$ é um sistemas de coordenadas ortogonais, sendo os factores de escala $l_r = 1, l_{\theta_1} = r, l_{\theta_2} = r\sin\theta_1, \ldots, l_{d-2} = r\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{d-3}$, $l_\varphi = r\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{d-3}\sin\theta_{d-2}$. Conclua que o Jacobiano da transformação é dado por

$$J = \left|\frac{\partial(x_1, \ldots, x_d)}{\partial(r, \theta_1, \ldots, \theta_{d-2}, \varphi)}\right| = r^{d-1}\sin^{d-2}\theta_1 \sin^{d-1}\theta_2 \ldots \sin\theta_{d-2}$$

c) Mostre que a integração no ângulo θ_k dá um factor

$$Sp_k = \frac{\Gamma(\frac{d-k}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{d-k+1}{2})}$$

e obtenha de novo S_d.

d) Mostre que a transformada de Fourier de uma função que depende apenas da coordenada radial é dada por

$$\tilde{f} = \int e^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{x}} f(r) d^d x = \int_0^\infty S_d \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\left(\frac{kr}{2}\right)^{\frac{d}{2}-1}} J_{\frac{d}{2}-1}(kr) r^{d-1} f(r) dr$$

e) Calcule a transformada de Fourier de $\rho_d(r) = \frac{1}{S_d a^{d-1}}\delta(r-a)$. Mostre que

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_d(k) &= \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\left(\frac{ka}{2}\right)^{\frac{d}{2}-1}} J_{\frac{d}{2}-1}(ka) \\
&= \Gamma(\frac{d}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\frac{d}{2}+n)} \left(\frac{ka}{2}\right)^{2n}
\end{aligned}$$

e verifique os casos particulares

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_1(k) &= \cos ka \\
\tilde{\rho}_3(k) &= \frac{\sin ka}{ka}
\end{aligned}$$

e o caso limite $d \to \infty$

$$\tilde{\rho}_\infty(k) = e^{-\frac{k^2}{2\sigma}}$$

sendo $\sigma = \lim_{d\to\infty} \frac{d}{a^2}$